

1次元制限3体問題の解法

佐藤 勲

1 運動方程式

制限3体問題は、2つのケプラー運動をしている天体から重力を受けている質量のない粒子の運動を記述する問題である。その1次元問題の運動方程式は、

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{dV}{dx} = -k^2 \left(\frac{1-\mu}{(x+\mu\kappa)^2} + \frac{\mu}{(x-(1-\mu)\kappa)^2} \right) \quad (1)$$

ここで、 k はガウスの重力定数、 $1-\mu$ と μ は、2つの摂動天体の質量、 V はポテンシャル

$$V = -k^2 \left(\frac{1-\mu}{x+\mu\kappa} + \frac{\mu}{x-(1-\mu)\kappa} \right). \quad (2)$$

である。2体座標 κ は、射影近点角 θ を使って次のように表される。

$$\kappa = \frac{\alpha(1-\cos\theta)}{1+\alpha^2\cos\theta}, \quad (3)$$

$$\alpha = -p + \sqrt{1+p^2}, \quad (4)$$

ここで、 $p = 1/Q$ は、遠日点距離の逆数である。軌道が楕円軌道の場合には、 κ は離心近点角 u を使って次のように表すこともできる。

$$\kappa = a(1-\cos u), \quad (5)$$

ここで、 a は軌道長半径である。

$X = x/\kappa$ において、固定座標系にすると、

$$\frac{d^2X}{dt^2} + \frac{2}{\kappa} \frac{d\kappa}{dt} \frac{dX}{dt} - \frac{k^2}{\kappa^3} X = -\frac{k^2}{\kappa^3} \left(\frac{1-\mu}{(X+\mu)^2} + \frac{\mu}{(X-1+\mu)^2} \right). \quad (6)$$

この座標系では、2つの摂動天体の座標は、 $X = -\mu$ and $X = 1-\mu$ に固定される。

時間 t から射影近点角 θ に変換すると、

$$\frac{d\kappa}{dt} = -k \sqrt{\frac{(1+\alpha^2)}{\alpha}} \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}, \quad (7)$$

$$\frac{dX}{dt} = \frac{k}{\sqrt{\alpha^3(1+\alpha^2)}} \frac{(1+\alpha^2\cos\theta)^2}{1-\cos\theta} \frac{dX}{d\theta}, \quad (8)$$

$$\frac{d^2X}{dt^2} = \frac{k^2}{\alpha^3(1+\alpha^2)} \frac{(1+\alpha^2\cos\theta)^4}{(1-\cos\theta)^2} \left(\frac{d^2X}{d\theta^2} - \frac{\alpha}{1+\alpha^2\cos\theta} \left(\frac{1+\alpha^2}{\alpha(1-\cos\theta)} + \alpha \right) \frac{dX}{d\theta} \right), \quad (9)$$

であるから、運動方程式は

$$\frac{1+\alpha^2\cos\theta}{1+\alpha^2} \left((1-\cos\theta) \frac{d^2X}{d\theta^2} + \sin\theta \frac{dX}{d\theta} \right) = X - \frac{1-\mu}{(X+\mu)^2} - \frac{\mu}{(X-1+\mu)^2} \quad (10)$$

となる。 $s = \cot(\theta/2)$ において、 θ から s へ変換すると

$$\cos \theta = \frac{s^2 - 1}{s^2 + 1}, \quad (11)$$

$$\sin \theta = -\frac{2s}{s^2 + 1}, \quad (12)$$

$$\frac{dX}{d\theta} = -\frac{1 + s^2}{2} \frac{dX}{ds}, \quad (13)$$

$$\frac{d^2 X}{d\theta^2} = \frac{(1 + s^2)^2}{4} \frac{d^2 X}{ds^2} + \frac{(1 + s^2)s}{2} \frac{dX}{ds}, \quad (14)$$

よって

$$\begin{aligned} \frac{s^2 + \lambda^2}{2} \frac{d^2 X}{ds^2} &= X - \frac{1 - \mu}{(X + \mu)^2} - \frac{\mu}{(X - 1 + \mu)^2} \\ &= \frac{X(X + \mu)^2(X - 1 + \mu)^2 - (1 - \mu)(X - 1 + \mu)^2 - \mu(X + \mu)^2}{(X + \mu)^2(X - 1 + \mu)^2}, \end{aligned} \quad (15)$$

ここで

$$\lambda^2 = \frac{1 - \alpha^2}{1 + \alpha^2} = \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}. \quad (16)$$

である。式 (15) の右辺の分子は、ラグランジュの 5 次方程式と呼ばれる。この 5 次方程式の 5 根は、運動方程式の定常解で、ラグランジュ点に相当する。

2 運動方程式の積分

$$\frac{d}{dx} \left(f(x) \frac{dy}{dx} - \frac{df(x)}{dx} y \right) = f(x) \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{d^2 f(x)}{dx^2} y \quad (17)$$

であることに注意して、式 (15) の両辺に積分因子

$$\frac{s^2 + \lambda^2}{2} \frac{dX}{ds} - sX \quad (18)$$

をかけると、

$$\left(\frac{s^2 + \lambda^2}{2} \frac{dX}{ds} - sX \right) \left(\frac{s^2 + \lambda^2}{2} \frac{d^2 X}{ds^2} - X \right) = - \left(\frac{s^2 + \lambda^2}{2} \frac{dX}{ds} - sX \right) \left(\frac{1 - \mu}{(X + \mu)^2} + \frac{\mu}{(X - 1 + \mu)^2} \right) \quad (19)$$

s で積分して、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{s^2 + \lambda^2}{2} \frac{dX}{ds} - sX \right)^2 &= -\frac{s^2 + \lambda^2}{2} \left(\frac{1 - \mu}{X + \mu} + \frac{\mu}{X - 1 + \mu} \right) + C \\ &\quad - \mu(1 - \mu) \int \left(\frac{1}{(X + \mu)^2} + \frac{1}{(X - 1 + \mu)^2} \right) ds \end{aligned} \quad (20)$$

$\mu = 0, 1$ の場合、すなわち 2 体問題の場合には、右辺の残余項は 0 になり、代数的積分となる。それ以外の場合には代数的積分がないから、この残余項が無限多価性の原因と考えられる。

3 1次元2体関数

1次元2体関数 $y = \kappa(x)$ を

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{1}{y^2} \quad (21)$$

を満たすものとして定義する。この方程式の1つの特殊解は、よく知られているように、 u を離心近点角とすると、ケプラー方程式

$$\begin{cases} y = 1 - \cos u \\ u - \sin u = x \end{cases} \quad (22)$$

に変換される。 $\kappa(x)$ を使うと、1次元2体問題の運動方程式

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{k^2}{y^2} \quad (23)$$

の一般解は、

$$y = a\kappa\left(\frac{kx}{a^{3/2}} + m_0\right) \quad (24)$$

となる。ただし、 a は軌道長半径、 m_0 は元期における平均近点角である。

この逆関数 $y = \kappa^{-1}(x)$ は、

$$\kappa^{-1}(x) = 2 \sin^{-1} \sqrt{\frac{x}{2} - \sqrt{x(2-x)}} \quad (25)$$

で、微分方程式

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{x^2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 \quad (26)$$

を満たす。

$\mu = 0$ の時、式 (15) は、

$$\frac{s^2 + \lambda^2}{2} \frac{d^2 X}{ds^2} = X - \frac{1}{X^2} \quad (27)$$

となる。これは2体問題の運動方程式なので、その解は2体関数を使って

$$X = \left(\frac{k}{c_1}\right)^{2/3} \frac{\kappa(c_1 m + c_2)}{\kappa(m)} \quad (28)$$

ただし、

$$m = \kappa^{-1}\left(\frac{2}{a(s^2 + \lambda^2)}\right) \quad (29)$$

と表される。

4 運動方程式の解

式 (15) で、 $z = s^2/\lambda^2$ とおくと、

$$z(1+z) \frac{d^2 X}{dz^2} + \frac{1+z}{2} \frac{dX}{dz} - \frac{1}{2} X = \frac{1}{2} \left(\frac{1-\mu}{(X+\mu)^2} + \frac{\mu}{(X-1+\mu)^2} \right) \quad (30)$$

左辺は、ガウスの超幾何微分方程式の形である。

左辺=0 の場合の解は、

$$\begin{aligned} X_0 &= c_1 F\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; -z\right) + c_2 z F\left(1, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; -z\right) \\ &= c_1(1+z) + c_2(\sqrt{z} + (1+z)\tan^{-1}\sqrt{z}) \\ &= c_1(s^2 + \lambda^2) + c_2\left(\lambda s + (s^2 + \lambda^2)\tan^{-1}\frac{s}{\lambda}\right) \end{aligned} \quad (31)$$

となる。

2 階線形方程式

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x) = 0 \quad (32)$$

の 2 つの 1 次独立な解を $f_1(x)$, $f_2(x)$ とすると、

$$y = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) \quad (33)$$

より、

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{y}{f_2(x)} \right) = c_1 \frac{d}{dx} \left(\frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right) \quad (34)$$

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x) = 0 \quad (35)$$

5 結論