

ケプラー運動の新しい近点角

佐藤 勲

要約

ケプラー運動に新しい近点角である射影近点角が発見された。この近点角は、射影幾何学の観点から、ケプラー運動の特異点解消によって発見された。射影近点角を用いると、円軌道、楕円軌道、放物線軌道、双曲線軌道、そして2体衝突が起こる直線軌道の全てのタイプのケプラー運動を2次元射影空間における2次曲線として統一的に扱うことができる。さらに射影近点角は、一般化された近点角へ一般化することができる。

1 はじめに

ケプラー運動の伝統的な解法に、平均近点角、離心近点角、真近点角の3つの近点角が使われることはよく知られている。しかし、ケプラー運動の伝統的な解法には、2つの特異性がある。それは、2体衝突が起こる場合にその表現が特異性があることと、離心率が1をはさんで、軌道のパラメーター表現が不連続になることである。これらの特異性を解消するためには、射影幾何学の観点からの研究が必要である。

2 射影空間内での2次曲線としてのケプラー軌道

射影幾何学の観点からは、円、楕円、放物線、双曲線、そして直線の全ての種類のケプラー軌道は、同じ2次曲線である。平面上のケプラー軌道を

$$\begin{cases} x = \frac{q(1+e)\cos f}{1+e\cos f}, \\ y = \frac{q(1+e)\sin f}{1+e\cos f} \end{cases} \quad (1)$$

とする。ここで、 q は近日点距離、 e は離心率、 f は真近点角である。 f を消去すると、軌道の2次式表現

$$(1+e)((1-e)x+eq)^2 + (1-e)y^2 = (1+e)q^2 \quad (2)$$

が得られる。明らかに、この表現は $e=1$ で特異である。2次元射影空間 P^2 での同時座標 (x_0, x_1, x_2) を用い、 (x, y) を $x = \frac{x_1}{x_0}, y = \frac{x_2}{x_0}$ と置き換えると、

$$-(1+e)qx_0^2 + 2ex_0x_1 + \frac{(1-e^2)}{(1+e)q}x_1^2 + \frac{1}{(1+e)q}x_2^2 = 0 \quad (3)$$

となる。これを2次形式で書くと、

$$(x_0, x_1, x_2) \begin{pmatrix} -(1+e)q & e & 0 \\ e & (1+e)p & 0 \\ 0 & 0 & 1/(1+e)q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (4)$$

となる。ここで、 $p = \frac{1}{Q} = \frac{1-e}{(1+e)q}$ 、すなわち、 p は遠日点距離 Q の逆数である。すると固有方程式は、

$$((1+e)q\lambda - 1)(\lambda^2 - (1+e)(p-q)\lambda - 1) = 0 \quad (5)$$

従って固有値は、

$$\begin{cases} \lambda_{\pm} &= \frac{-(1+e)(q-p) \pm \sqrt{(1+e)^2(p+q)^2 + 4e^2}}{2}, \\ \lambda_0 &= \frac{1}{(1+e)q} \end{cases} \quad (6)$$

ここで、 $\lambda_+ \lambda_- = -1$ という関係が成り立つ。

さて、

$$\begin{cases} \cosh \phi \cos 2\psi &= \frac{(1+e)(q+p)}{2} \\ \cosh \phi \sin 2\psi &= e \\ \sinh \phi &= \frac{(1+e)(q-p)}{2} \end{cases} \quad (7)$$

とおくと、 $\lambda_+ = \exp(-\phi)$, $\lambda_- = -\exp(\phi)$ となり、それらに随伴する固有ベクトルは、

$$\begin{cases} \vec{\lambda}_+ &= (\sin \psi, \cos \psi, 0) \\ \vec{\lambda}_- &= (\cos \psi, -\sin \psi, 0) \\ \vec{\lambda}_0 &= (0, 0, 1) \end{cases} \quad (8)$$

となる。ただし、

$$\begin{cases} \cos \psi &= \frac{(1+e)(q+p) + \sqrt{(1+e)^2(q+p)^2 + 4e^2}}{2N} \\ \sin \psi &= e/N \end{cases} \quad (9)$$

である。従って、2次元射影空間 P^2 におけるケプラー軌道の楕円錐のパラメーター表現は、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \vec{\lambda}_- & \vec{\lambda}_+ & \vec{\lambda}_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{-\lambda_-} \\ \cos \theta / \sqrt{\lambda_+} \\ \sin \theta / \sqrt{\lambda_0} \end{pmatrix} \\ &= \exp\left(-\frac{\phi}{2}\right) \cos \psi \begin{pmatrix} 1 + \exp \phi \tan \psi \cos \theta \\ -\tan \psi + \exp \phi \cos \theta \\ \sqrt{\exp 2\phi - \tan^2 \psi} \sin \theta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (10)$$

となる。ここで、 θ は、射影近点角である。従って、

$$\begin{cases} \alpha = \exp \phi &= \frac{(1+e)(q-p) + \sqrt{(1+e)^2(q+p)^2 + 4e^2}}{2} \\ \beta = \tan \psi &= \frac{2e}{(1+e)(q+p) + \sqrt{(1+e)^2(q+p)^2 + 4e^2}} \end{cases} \quad (11)$$

とおくと、

$$(x_0 : x_1 : x_2) = (1 + \alpha\beta \cos \theta : -\beta + \alpha \cos \theta : \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \sin \theta) \quad (12)$$

となる。ここで、 α は P^2 における楕円の長半径、 β は楕円の中心座標である。

3 ケプラー要素の表現

いくつかのケプラー要素は、パラメーター α と β によって、次のように表わされる。

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{x_1}{x_0} = \frac{-\beta + \alpha \cos \theta}{1 + \alpha\beta \cos \theta} \\ y = \frac{x_2}{x_0} = \frac{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \sin \theta}{1 + \alpha\beta \cos \theta} \\ r = \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{x_0} = \frac{\alpha - \beta \cos \theta}{1 + \alpha\beta \cos \theta} \end{array} \right. \quad (13)$$

$$\begin{aligned} a &= \frac{\alpha(1 + \beta^2)}{1 - \alpha^2\beta^2} \\ e &= \frac{\beta(1 + \alpha^2)}{\alpha(1 + \beta^2)} \\ 1 - e &= \frac{(\alpha - \beta)(1 - \alpha\beta)}{\alpha(1 + \beta^2)} \\ 1 + e &= \frac{(\alpha + \beta)(1 + \alpha\beta)}{\alpha(1 + \beta^2)} \\ q &= \frac{\alpha - \beta}{1 + \alpha\beta} \\ p = \frac{1}{Q} &= \frac{1 - \alpha\beta}{\alpha + \beta} \\ (1 + e)q &= \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha(1 + \beta^2)} \\ \frac{e}{(1 + e)q} &= \frac{\beta(1 + \alpha^2)}{\alpha^2 - \beta^2} \end{aligned} \quad (14)$$

軌道の形は、 $\beta = 0$ の時は円、 $\alpha\beta < 1$ の時は楕円、 $\alpha\beta = 1$ の時は放物線、 $\alpha\beta > 1$ の時は双曲線、 $\alpha = \beta$ の時は直線である。

4 ケプラー方程式

射影近点角 θ に対するケプラー方程式は、エネルギー積分の式から得られる。エネルギー積分の式

$$\frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right\} - \frac{k^2}{r} = -\frac{k^2}{2a} \quad (15)$$

に前節で導かれた式を代入すると、

$$\left(\frac{d\theta}{dt} \right) \frac{\alpha - \beta \cos \theta}{(1 + \alpha\beta \cos \theta)^2} = \frac{r}{x_0} = \frac{k}{\sqrt{\alpha(1 + \beta^2)}} \quad (16)$$

となる。これを積分すると

$$\int \frac{\alpha - \beta \cos \theta}{(1 + \alpha\beta \cos \theta)^2} d\theta = \frac{k(t - T_0)}{\sqrt{\alpha(1 + \beta^2)}} \quad (17)$$

というケプラー方程式が得られる。ここで、 T_0 は近日点通過時刻である。もし $\alpha\beta < 1$ ならば、軌道は楕円で、この積分は、

$$\begin{cases} M = \left(\frac{1 - \alpha^2\beta^2}{\alpha(1 + \beta^2)} \right)^{3/2} k(t - T_0) \\ \tan \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 + \alpha\beta}{1 - \alpha\beta}} \tan \frac{u}{2} \end{cases} \quad (18)$$

という置き換えによって、よく知られたケプラー方程式の形

$$u - e \sin u = M \quad (19)$$

に変換される。ただし、 u は離心近点角である。

もし $\alpha\beta = 1$ ならば、軌道は放物線で、この積分は

$$s = \tan \frac{\theta}{2} \quad (20)$$

という置き換えによって、3次方程式

$$s^3 + 3 \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2 + 1} s = \frac{6k(t - T_0)}{\sqrt{\alpha}(\alpha^2 + 1)^{3/2}} \quad (21)$$

になる。この3次方程式の解は、

$$\begin{aligned} s = \tan \frac{\theta}{2} = & \sqrt[3]{\frac{3k(t - T_0)}{\sqrt{\alpha}(\alpha^2 + 1)^{3/2}} + \sqrt{\frac{9k^2(t - T_0)^2}{\alpha(\alpha^2 + 1)^3} + \left(\frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2 + 1}\right)^3}} \\ & + \sqrt[3]{\frac{3k(t - T_0)}{\sqrt{\alpha}(\alpha^2 + 1)^{3/2}} - \sqrt{\frac{9k^2(t - T_0)^2}{\alpha(\alpha^2 + 1)^3} + \left(\frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2 + 1}\right)^3}} \end{aligned} \quad (22)$$

である。

もし $\alpha\beta > 1$ ならば、軌道は双曲線で、この積分は

$$\begin{cases} M' = \left(\frac{\alpha^2\beta^2 - 1}{\alpha(1 + \beta^2)} \right)^{3/2} k(t - T_0) \\ \tan \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{\alpha\beta + 1}{\alpha\beta - 1}} \tanh \frac{u'}{2} \end{cases} \quad (23)$$

という置き換えによって、ケプラー方程式

$$e \sinh u' - u' = M' \quad (24)$$

になる。

5 一般化された近点角

方程式 (18) における離心近点角 u と射影近点角 θ の関係は、任意の定数 λ に対して

$$\tan \frac{\Theta}{2} = \lambda \tan \frac{u}{2} \quad (25)$$

という関係で定義される、一般化された近点角 Θ が存在することを示唆している。実際、ケプラー運動は、 Θ を使って

$$\begin{cases} x = \frac{\left(\lambda^2 - \frac{1+e}{1-e}\right) + \left(\lambda^2 + \frac{1+e}{1-e}\right) \cos \Theta}{(\lambda^2 + 1) + (\lambda^2 - 1) \cos \Theta} q \\ y = \frac{2\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \lambda \sin \Theta}{(\lambda^2 + 1) + (\lambda^2 - 1) \cos \Theta} q \\ r = \frac{\left(\lambda^2 + \frac{1+e}{1-e}\right) + \left(\lambda^2 - \frac{1+e}{1-e}\right) \cos \Theta}{(\lambda^2 + 1) + (\lambda^2 - 1) \cos \Theta} q \end{cases} \quad (26)$$

と書ける。従って、一般化された近点角は、 $\lambda = 1$ ならば離心近点角、 $\lambda = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$ ならば真近点角、 $\lambda = \sqrt{\frac{1+\alpha\beta}{1-\alpha\beta}}$ ならば射影近点角となる。

6 結論

射影幾何学の観点から、新しい近点角である射影近点角が導かれた。射影近点角は、ケプラー運動の特異性である直線 2 体衝突軌道の表現の特異性を解消する。離心近点角、真近点角、射影近点角は、一般化された近点角の特別な場合である。