

# 特殊な5次方程式の代数的解法

佐藤 勲

## 1 はじめに

4次方程式までは解の公式があり、代数的に解けるが、5次方程式以上は一般には代数的に解けないことはよく知られている。しかし、全く解けないということではなく、5次方程式の解のガロア群が5次の対称群で、正20面体の群が5次の交代群であることから、楕円モジュラ関数を使うと、超越的な方法で5次方程式が一般に解けることが知られている。しかし、そんな高度なことをしなくても、特殊なタイプのものはもっと簡単に解ける。最も簡単なものは、因数分解できるタイプのものである。因数分解できないタイプの場合で、代数的に解ける場合について述べる。

## 2 5次方程式の変形

一般の5次方程式

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0 \quad (1)$$

は、

$$y = x + \frac{b}{5a} \quad (2)$$

と置き換えると、4次項の消えた標準形

$$y^5 + py^3 + qy^2 + ry + s = 0 \quad (3)$$

に移る。ここで、

$$\begin{cases} p = \frac{-2b^2 + 5ac}{5a^2} \\ q = \frac{4b^3 - 15abc + 25a^2d}{25a^3} \\ r = \frac{-3b^4 + 15ab^2c - 50a^2bd + 125a^3e}{125a^4} \\ s = \frac{4b^5 - 25ab^3c + 125a^2b^2d - 625a^3be + 3125a^4f}{3125a^5} \end{cases} \quad (4)$$

である。

## 3 代数的解 1

もし、 $s = 0$  という関係があれば、因数分解できて

$$y(y^4 + py^2 + qy + r) = 0 \quad (5)$$

となるから、直ちに

$$x = -\frac{b}{5a}, -\frac{b}{5a} + y_1, -\frac{b}{5a} + y_2, -\frac{b}{5a} + y_3, -\frac{b}{5a} + y_4 \quad (6)$$

という解が得られる。ただし、 $y_1, y_2, y_3, y_4$  は、4次方程式

$$y^4 + py^2 + qy + s = 0 \quad (7)$$

の4根である。

## 4 代数的解 2

もし、 $p = q = r = 0$  という関係があれば、

$$y^5 + s = 0 \quad (8)$$

となるから、直ちに

$$x_n = -\frac{b}{5a} - \zeta_n \sqrt[5]{s} = -\frac{b + \zeta_n \sqrt[5]{4b^5 - 25ab^3c + 125a^2b^2d - 625a^3be + 3125a^4f}}{5a} \quad (9)$$

という解が得られる。ただし、 $\zeta_n$  は1の5乗根で、

$$\zeta_n = e^{2n\pi i/5} = \cos \frac{2n\pi}{5} + i \sin \frac{2n\pi}{5} = 1, \frac{-1 + \sqrt{5} \pm \sqrt{10 + 2\sqrt{5}i}}{4}, \frac{-1 - \sqrt{5} \pm \sqrt{10 - 2\sqrt{5}i}}{4} \quad (10)$$

## 5 代数的解 3

$y = u_1 + u_2$  とおくと、方程式 (3) は、

$$(5u_1u_2 + p)(u_1 + u_2)^3 + q(u_1 + u_2)^2 + \{r - 5(u_1u_2)^2\}(u_1 + u_2) + \{u_1^5 + u_2^5 + s\} = 0 \quad (11)$$

となる。従って、

$$\begin{cases} p^2 - 5r = 0 \\ q = 0 \end{cases} \quad (12)$$

という関係があれば、

$$\begin{cases} u_1^5 + u_2^5 = -s \\ u_1u_2 = -\frac{p}{5} \end{cases} \quad (13)$$

となるから、 $u_1^5, u_2^5$  は、2次方程式

$$v^2 + sv - \left(\frac{p}{5}\right)^5 = 0 \quad (14)$$

の2根となる。すなわち、

$$u_1^5, u_2^5 = v = -\frac{s}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{5}\right)^5} \quad (15)$$

よって、

$$y^5 + py^3 + \frac{p^2}{5}y + s = 0 \quad (16)$$

の形となった方程式の解は、

$$x_n = -\frac{b}{5a} + \zeta_n \sqrt[5]{-\frac{s}{2} + \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{5}\right)^5}} + \zeta_{-n} \sqrt[5]{-\frac{s}{2} - \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{5}\right)^5}} \quad (17)$$

例)  $x^5 + 5x^3 + 5x + 2 = 0$  の解は、

$$x_n = \zeta_n \sqrt[5]{-1 + \sqrt{2}} - \zeta_{-n} \sqrt[5]{1 + \sqrt{2}} \quad (18)$$