

# 特殊な6次方程式の代数的解法

佐藤 勲

## 1 はじめに

4次方程式までは解の公式があり、代数的に解けるが、5次方程式以上は一般には代数的に解けないことはよく知られている。しかし、全く解けないということではなく、解のガロア群が  $n$  次の対称群の可解な部分群である場合には、代数的に解ける。最も簡単なものは、因数分解できるタイプのものである。因数分解できないタイプの場合で、代数的に解ける場合について述べる。

## 2 6次方程式の変形

一般の6次方程式

$$ax^6 + bx^5 + cx^4 + dx^3 + ex^2 + fx + g = 0 \quad (1)$$

は、

$$y = x + \frac{b}{6a} \quad (2)$$

と置き換えると、5次項の消えた標準形

$$y^6 + py^4 + qy^3 + ry^2 + sy + t = 0 \quad (3)$$

に移る。ここで、

$$\begin{cases} p = \frac{-5b^2 + 12ac}{12a^2} \\ q = \frac{5b^3 - 18abc + 27a^2d}{27a^3} \\ r = \frac{-5b^4 + 24ab^2c - 72a^2bd + 144a^3e}{144a^4} \\ s = \frac{b^5 - 6ab^3c + 27a^2b^2d - 108a^3be + 324a^4f}{324a^5} \\ t = \frac{-5b^6 + 36ab^4c - 216a^2b^3d + 1296a^3b^2e - 7776a^4bf + 46656a^5g}{46656a^6} \end{cases} \quad (4)$$

である。

## 3 代数的解 1

もし、 $t = 0$  という関係があれば、因数分解できて

$$y(y^5 + py^3 + qy^2 + r^2 + sr) = 0 \quad (5)$$

となるから、直ちに

$$x = -\frac{b}{6a}, -\frac{b}{6a} + y_1, -\frac{b}{6a} + y_2, -\frac{b}{6a} + y_3, -\frac{b}{6a} + y_4, -\frac{b}{6a} + y_5 \quad (6)$$

という解が得られる。ただし、 $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5$  は、5 次方程式

$$y^5 + py^3 + qy^2 + ry + s = 0 \quad (7)$$

の 5 根である。

## 4 代数的解 2

もし、 $q = s = 0$  という関係があれば、

$$y^6 + py^4 + ry^2 + t = 0 \quad (8)$$

となるから、直ちに  $y^2$  についての 3 次方程式となって解けて、

$$x = -\frac{b}{6a} \pm \sqrt{-\frac{p}{3} + \frac{\omega}{3} \sqrt[3]{-Q + \sqrt{Q^2 + P^3}} + \frac{\omega^2}{3} \sqrt[3]{-Q - \sqrt{Q^2 + P^3}}} \quad (9)$$

ただし、

$$P = p^2 - 3r \quad (10)$$

$$Q = \frac{2p^3 - 9pr + 27t}{2} \quad (11)$$

という解が得られる。ただし、 $\omega$  は、1 の 3 乗根で、

$$\omega = 1, \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} \quad (12)$$

のいずれか。3 つを入れ替えることにより、全ての解が得られる。

## 5 代数的解 3

$y = u + v$  とおくと、

$$y^6 + py^4 + qy^3 + ry^2 + sy + t = \{9(uv)^2 + 3puv + r\}(u+v)^2 + \{(p+6uv)(u^3+v^3) + 3quv + s\}(u+v) + \{(u^3+v^3)^2 + q(u^3+v^3) + t\} = 0 \quad (13)$$

となるので、

$$\begin{cases} 9(uv)^2 + 3puv + r = 0 \\ (u^3 + v^3)^2 + q(u^3 + v^3) + t = 0 \\ (p + 6uv)(u^3 + v^3) + 3quv + s = 0 \end{cases} \quad (14)$$

という関係があれば解ける。最初の 2 つの式から

$$uv = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4r}}{6} \quad (15)$$

$$u^3 + v^3 = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 - 4t}}{2} \quad (16)$$

これを 3 番目の式に代入すると、

$$(pq - 2s)^2 = (p^2 - 4r)(q^2 - 4t) \quad (17)$$

これが解けるための条件である。この関係式が成立するとき、 $u^3, v^3$  は

$$z^2 - \frac{-q \pm \sqrt{q^2 - 4t}}{2} z + \left( \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4r}}{6} \right)^3 = 0 \quad (18)$$

の2根であるから、

$$u, v = \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{\frac{-q \pm \sqrt{q^2 - 4t}}{4} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{q^2 - 2t \pm q\sqrt{q^2 - 4t}}{2} + \frac{r(-p \pm \sqrt{p^2 - 4r})}{54}}} \quad (19)$$

これより、

$$x = -\frac{b}{6a} + \omega u + \omega^2 v \quad (20)$$

ただし、 $\omega$  は、1の3乗根。

例)

$$x^6 + 2x^5 + 2x^4 - x^3 - 3x^2 - x + 1 = 0 \quad (21)$$

の解は、

$$x = -\frac{1}{3} + \frac{\omega}{3} \sqrt[3]{\frac{59 + 9\sqrt{5} + 3\sqrt{462 + 86\sqrt{5}}}{4}} + \frac{\omega^2}{3} \sqrt[3]{\frac{59 + 9\sqrt{5} - 3\sqrt{462 + 86\sqrt{5}}}{4}} \quad (22)$$

および

$$x = -\frac{1}{3} + \frac{\omega}{3} \sqrt[3]{\frac{59 - 9\sqrt{5} + 3\sqrt{462 - 86\sqrt{5}}}{4}} + \frac{\omega^2}{3} \sqrt[3]{\frac{59 - 9\sqrt{5} - 3\sqrt{462 - 86\sqrt{5}}}{4}} \quad (23)$$