

# 特殊な常微分方程式の初等解法

佐藤 勲

## 1 はじめに

常微分方程式の初等解法は、変数分離型やベルヌーイ型などの1階の方程式、線形方程式の場合ぐらしか広く知られていないが、実際には求積法によって解ける特殊な形の方程式が数多く存在する。しかし、それらは散在的で形に統一性がないため、注目されていないだけである。そのような微分方程式を取り上げた例としては、長島隆廣著「常微分方程式 80 余例とその厳密解」(近代文芸社)があるが、ここでは独自の研究によって見出された方程式を中心に掲げる。

## 2 1階線形常微分方程式

以下においては、 $y' = dy/dx$ ,  $c$  を任意定数とする。

方程式	一般解	注釈
$y' = p(x)y + q(x)$	$y = e^{\int p(x)dx} \left( \int q(x)e^{-\int p(x)dx} dx + c \right)$	解の公式
$y' = ay + b$	$y = -\frac{b}{a} + ce^{ax}$	定数係数

### 3 1 階非線形常微分方程式

以下においては、 $y' = dy/dx$ ,  $c$  を任意定数とする。

方程式	一般解	注釈
$y' = f(x)g(y)$	$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$	変数分離型
$y' = f(y/x)$		同次型
$y' = p(x)y + q(x)y^n$		ベルヌーイ型
$\frac{\partial\phi(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial\phi(x, y)}{\partial y} = 0$	$\phi(x, y) = c$	全微分型
$y = xy' + f(y')$		クレロー型
$y = xf(y') + g(y')$		ラグランジュ型
$y' = \frac{\lambda(y-a)(y-ab)}{a(b-1)}$	$y = \frac{a(b+ce^{-\lambda x})}{1+ce^{-\lambda x}}$	リッカチ型
$y' = \frac{(y-a)(y-ab)}{a(b-1)x}$	$y = \frac{a(b+cx)}{1+cx}$	リッカチ型
$y' = (ay+b)(p(x)y+q(x))$	$y = -\frac{b}{a} - \frac{m(x)}{\int p(x)m(x)dx + c}$ ( $m(x) = e^{\int \frac{aq(x)-2bp(x)}{a} dx}$ )	リッカチ型
$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$	$y = y_1(x) - \frac{m(x)}{\int p(x)m(x)dx + c}$ ( $m(x) = e^{\int (2p(x)y_1(x)+q(x))dx}$ , $y_1(x)$ は特解)	リッカチ型
$y' = a_2y^2 + a_1y + a_0$	$y = -\frac{a_1}{2a_2} + \frac{\sqrt{4a_0a_2 - a_1^2}}{2a_2} \tan\left(\frac{\sqrt{4a_0a_2 - a_1^2}(x+c)}{2}\right)$	定数係数リッカチ型
$y' = -\frac{y(mg(x) - xg'(x) + mf(y))}{x(ng(x) + nf(y) - yf'(y))}$	$f(y) + cx^m y^n + g(x) = 0$	3 項型
$y' = \frac{y(a_1x + b_1y)}{x(a_2x + b_2y)}$	$y + cx \frac{(a_1-a_2)b_1}{a_1b_2-a_2b_1} y \frac{(b_2-b_1)a_2}{a_1b_2-a_2b_1} + \frac{a_1-a_2}{b_1-b_2} x = 0$	定数 3 項型

(2)

### 4 2 階線形常微分方程式

2 階の線形常微分方程式

$$y'' = p(x)y' + q(x)y \quad (3)$$

は、定数係数の場合には一般解が求められるが、一般の場合には初等的に一般解が得られない。しかし、1つの特解  $y_1(x)$  がわかれば、もう一つの1次独立な解は、

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{\int p(x)dx}}{y_1(x)^2} dx \quad (4)$$

で求められる。従って、一方の特解によって方程式を分類することもできる。2階の線形常微分方程式の解には、1階の方程式には現れないような独特の特殊関数が数多く現れる。以下においては、 $y' = dy/dx, y'' = d^2y/dx^2, c_1, c_2$  を任意定数とする。

方程式	一般解	注釈
$y'' = ay' + by$	$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$ $(\lambda_1, \lambda_2 = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4b}}{2})$	定数係数
$y'' = 2ay' - a^2 y$	$y = (c_1 + c_2 x) e^{ax}$	定数係数 (重根)
$y'' = \frac{a}{x} y' + \frac{b}{x^2} y$	$y = c_1 x^{\lambda_1} + c_2 x^{\lambda_2}$ $(\lambda_1, \lambda_2 = \frac{a+1 \pm \sqrt{(a+1)^2 + 4b}}{2})$	オイラーの方程式
$y'' = \frac{a}{x} y' - \frac{(a+1)^2}{4x^2} y$	$y = (c_1 + c_2 \log x) x^{a+1}$	オイラーの方程式 (重根)
$y'' = xy$	$y = c_1 Ai(x) + c_2 Bi(x)$	エアリー関数
$y'' = -\frac{1}{x} y' - \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y$	$y = c_1 J_\nu(x) + c_2 J_{-\nu}(x)$	ベッセル関数
$y'' = -\frac{1}{x} y' - \left(1 - \frac{n^2}{4x^2}\right) y$	$y = c_1 N_{n/2}(x) + c_2 N_{-n/2}(x)$	ノイマン関数
$y'' = -\frac{(\alpha + \beta + 1)x - \gamma}{x(x-1)} y' - \frac{\alpha\beta}{x(x-1)} y$	$y = c_1 F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ $+ c_2 x^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma; x)$	ガウスの超幾何関数
$p(x)y'' = p''(x)y$	$y = c_1 p(x) + c_2 p(x) \int \frac{dx}{p(x)^2}$	
$y'' = \frac{2}{x^2 + a^2} y$	$y = c_1 \frac{(x^2 + a^2)}{2} + c_2 \left( \frac{x^2 + a^2}{a^3} \tan^{-1} \frac{x}{a} + \frac{x}{a^2} \right)$	

(5)

方程式	特解	注釈
$p(x)y'' = p''(x)y$	$p(x)y' - p'(x)y = c_1$ $\left( p(x) \int \frac{dx}{p(x)^2} \right) y' - \left( \frac{1}{p(x)} + p'(x) \int \frac{dx}{p(x)^2} \right) y = c_2$	角運動量積分 第2角運動量積分

(6)

## 5 2階非線形常微分方程式

2階変数分離型の常微分方程式の解が変数分離形  $f(y) = g(x)$  で表されるのは、線形の場合

$$y'' = f(x)y \quad (7)$$

と、 $x$  を陽に含まない

$$y'' = f(y) \quad (8)$$

の形の場合である。また、 $y'$  を含まない2階の常微分方程式  $y'' = f(x, y)$  の解は、

$$F(x, y, c_1) = c_2 \quad (9)$$

の形をしている。

以下においては、 $y' = dy/dx, y'' = d^2y/dx^2, c_1, c_2$  を任意定数とする。

方程式	一般解	注釈
$y'' = \frac{y'^2}{y+b} - \frac{y'}{x+a}$	$y = c_2(x+a)^{c_1} - b$	べき関数
$y'' = a_2y^2 + a_1y + a_0$	$y = -\frac{a_1}{2a_2} + \frac{6}{a_2}\wp(x - c_1, g_2, g_3)$ $\left(g_2 = \frac{a_1^2 - 4a_0a_2}{12}, g_3 = c_2\right)$	楕円関数
$y'' = \frac{u''y'}{u'} + u'^2(a_2y^2 + a_1y + a_0)$	$y = -\frac{a_1}{2a_2} + \frac{6}{a_2}\wp(u(x) - c_1, g_2, g_3)$ $\left(g_2 = \frac{a_1^2 - 4a_0a_2}{12}, g_3 = c_2\right)$	楕円関数
$y'' = \frac{2y'^2}{y+b} + a_2y^2 + a_1y + a_0$	$y = \frac{a_1b - 2a_0 + 12b\wp(x - c_1, g_2, g_3)}{a_1 - 2a_2b + 12\wp(x - c_1, g_2, g_3)}$ $\left(g_2 = \frac{a_1^2 - 4a_0a_2}{12}, g_3 = c_2\right)$	楕円関数
$y'' = \frac{2y'^2}{y+b} + \frac{u''y'}{u'} + u'^2(a_2y^2 + a_1y + a_0)$	$y = \frac{a_1b - 2a_0 + 12b\wp(u(x) - c_1, g_2, g_3)}{a_1 - 2a_2b + 12\wp(u(x) - c_1, g_2, g_3)}$ $\left(g_2 = \frac{a_1^2 - 4a_0a_2}{12}, g_3 = c_2\right)$	楕円関数
$y'' = \frac{2y'^2}{y+b} + a_1(x)y' + a_0(x)(y^2 - b^2)$	$y = \frac{b(a - y_0(x))}{a + y_0(x)}$ $(y_0'' = a_1(x)y_0' + 2ba_0(x)y_0)$	
$y'' = -\frac{k^2}{(y+b)^2}$	$y = \kappa(c_1, kx + c_2) - b$ $\left(\kappa(a, x) = a(1 - \cos u), u - \sin u = \frac{x}{a^{3/2}}\right)$	1次元2体関数
$y'' = \frac{y'^3}{(x+b)^2}$	$y = \kappa^{-1}(c_1, x + b) + c_2$ $\left(\kappa^{-1}(a, x) = \frac{1}{a^{3/2}} \left(2 \sin^{-1} \sqrt{\frac{x}{2a}} - \sqrt{\frac{x}{a} \left(2 - \frac{x}{a}\right)}\right)\right)$	1次元逆2体関数
$y'' = \frac{2}{y+b}y'^2 + a_1(x)y' + a_0(x)y$	$y = -b + \frac{1}{y_0}$ $(y_0'' = a_1(x)y_0' - a_0(x)y_0)$	準線形
$y'' = f(y)y'^2 + a_1(x)y' + a_0(x)g(y)$	$y_0 = c_1 \int e^{-\int f(y)dy} dy + c_2$ $\left(y_0'' = a_1(x)y_0' - a_0(x) \frac{g(y(y_0))}{\left(\frac{\partial y}{\partial y_0}\right)}\right)$	微分2次項消去

(10)

$$y'' = \frac{n}{y+b} \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)g(y)$$

$$y'' = ay^n \quad c_1 y F \left( \frac{1}{n+1}, \frac{1}{2}, \frac{n+2}{n+1}, -\frac{2c_1^2 a y^{n+1}}{n+1} \right) = x + c_2 \quad (n \neq -1)$$

$$y'' = \frac{a}{y} \quad \operatorname{Erfi} \left( \sqrt{\log(c_1 y)} \right) = c_1 \sqrt{\frac{2a}{\pi}} (x + c_2)$$

$$y'' = \frac{a}{y^3} \quad c_1 y^2 = a + c_1^2 (x + c_2)^2$$

$$y'' = -\frac{1}{a} y'^2 \quad y = a \log(x - c_1) + c_2 \quad \text{対数関数}$$

$$y''^2 = -\frac{4}{a^2} y'^4 + \frac{4}{a} y'^3 \quad y = a \tan^{-1}(x - c_1) + c_2 \quad \text{逆三角関数}$$

$$y''^2 = \frac{4}{a^2} y'^4 - \frac{4}{a} y'^3 \quad y = a \tanh^{-1}(x - c_1) + c_2 \quad \text{逆双曲線関数}$$

$$\begin{aligned} &4a_1 a_2 x^2 y''^2 + \\ &((a_1 + a_2)((a_1 - a_2)^2 + 4x^2 y'^2) - 4(a_1^2 + a_2^2)xy')y'' \\ &= -4x^2 y'^4 + 2x(a_1 + a_2)y'^3 \end{aligned} \quad y = a_1 \log(x - c_1) + a_2 \log(x + c_1) + c_2$$

$$\begin{aligned} &(f(x) + g(y))y'' \\ &= -g'(y)y'^2 - 2f'(x)y' - f''(x)y + h(x) \end{aligned} \quad \int g(y)dy + f(x)y = \int \int h(x)dx dx + c_1 x + c_2 \quad \text{3項微分型}$$

$$(a_2 y + a_1 x + a_0)y'' = -a_2 y'^2 - 2a_1 y' - f(x) \quad \frac{a_2}{2} y^2 - (a_1 x + a_0)y = \int \int f(x)dx dx + c_1 x + c_2$$

$$(a_2 y + a_1 x + a_0)^3 y'' = a_1^2 a_2 y^2 + 2a_1^2 (a_1 x + a_0)y \quad \frac{a_2}{2} y^2 + ()y = c_1$$

$$y'' = \frac{-F_{yy}F_x^2 + 2F_x F_y F_{xy} - F_{xx}F_y^2}{F_y^3} \quad F(x, y, c_1) = c_2$$

(11)

方程式	特解	注釈
$y'' = f(x)g(y)$	$g(y) = 0$	
$y'' = ax^m y^n$	$y^{n-1} = \frac{(m+2)(m+n+1)}{a(n-1)^2} x^{m+2}$	$(m \neq -2)$
$y'' = \frac{a(y^2 - ax^2)}{y^3}$	$y^2 = ax^2 + c_1$	

(12)

## 6 3階線形常微分方程式

方程式	一般解	注釈
$y''' = ay'' + by' + cy$	$y = c_1e^{\lambda_1x} + c_2e^{\lambda_2x} + c_3e^{\lambda_3x}$ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ は、 $\lambda^3 - a\lambda^2 - b\lambda - c = 0$ の根	定数係数
$y''' = (2a + b)y' - (a^2 + 2ab)y' + a^2b$	$y = (c_1 + c_2x)e^{ax} + c_3e^{bx}$	定数係数 (重根)
$y''' = 3ay' - 3a^2y' + a^3y$	$y = (c_1 + c_2x + c_3x^2)e^{ax}$	定数係数 (3重根)

(13)

## 7 3階非線形常微分方程式

方程式	一般解	注釈
$y''' = \frac{2y'y''}{y+b}$	$y = \kappa(c_1, c_2x + c_3) - b$	1次元2体関数
$y''' = \frac{ny'y''}{y}$	$yF\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{2}, \frac{n+2}{n+1}, c_3y^{n+1}\right) = c_1x + c_2 \quad (n \neq -1)$	

(14)

## 8 4階線形常微分方程式

方程式	一般解	注釈

(15)

## 9 4階非線形常微分方程式

方程式	一般解	注釈

(16)